経営論集　第17巻第1号　2007年　199～210頁

単一工程 JIT 生産システムの性能評価

岩　瀬　雅　治

1　はじめに

本研究では，各期の製品需要と生産能力が変動する単一工程 JIT 生産在庫システムの性能評価を行う。生産に必要な部品と生産された製品の在庫管理は，生産指示かんばんと外注かんばんによって管理されるとする。

JIT 生産システムは，生産に不必要な無駄を取り除くことによって生産総費用をできるだけ少なくすることを目的として研究されてきた。JIT 生産システムの詳細は，[1]等に述べられている。JIT 生産システムの性能評価と最適化について，これまで多くの研究が行われてきた。JIT 生産システムを連続時間マルコフ連鎖とみなして性能評価を行った研究として，[2]，[3]，[4]等がある。[2]は単一工程および二工程かんばんシステムを扱い，数値解を導いている。[3]，[4]は多工程かんばんシステムに対しサブシステムへの分解と繰り返し計算により性能評価を行っている，

JIT 生産システムを離散時間マルコフ連鎖とみなして性能評価を行った研究として，[5]，[6]等がある。[6]は，生産指示かんばんと引き取りかんばんを用いた単一工程 JIT 生産システムを離散時間マルコフ連鎖としてモデル化し，システムの安定条件を導いた。そして製品の受注残の確率母関数を求めることによって，最適なかんばん枚数を決定するアルゴリズムを示した。

[6]では生産能力一定の場合のみを論じ，機械故障等によって生産能力が変動する場合は考慮されていなかった。本研究では，機械故障を考慮して[6]の研究を拡張し，生産能力が期によって確率的に変動する JIT 生産システムを扱う。本研究では，まず JIT 生産システムに対する M/G/1 型離散時間マルコフ連鎖を定め，いくつかの性質を示し，システムの安定条件を導く。そして，システムの性能評価を行うアルゴリズムを導き数値例を示す。

本論文の構成は以下の通りである。まず 2 章で対象とする JIT 生産システムについて説明する。3 章でシステムの状態変化を表すマルコフ連鎖を定め，4 章でシステムの確率的性質を示す。5 章で平均部品在庫費用，注文の平均遅れ費用，平均総費用を求める方法を導き，6 章で性能評価のためのアルゴリズムを示す。7 章にいくつかの数値例を示した。

2　JIT 生産システム

各期の生産能力と製品需要が共に確率的に変動する単一工程 JIT 生産システムを考える。この生産システムは単一品種を生産し，外注かんばんと生産指示かんばんが使用されるとする。みたされない製品需要は繰り越されるとする。部品の納入リードタイム L は一定とする。すなわち部品在庫のうちで第 k 期の生産によって使用された部品は第 $k+1$ 期首に発注され第 $k+L+1$ 期首に納入される。各期における製品需要は互いに独立で同一な分布に従うものとし，繰り越し需要は待ち行列に並び，先着順に処理されるものとする。各期の生産能力と製品需要はそれぞれ互いに独立で同一な分布に従って確率的に変動するものとする。$k=1, 2, \cdots$に対し，以下の記号を用いる。

B_k　：第 k 期首の繰り越し需要
C_k　：第 k 期の生産能力
$C_{\max}$　：各期の生産量の最大値
D_k　：第 k 期の需要量
D　：第 k 期の需要量の平均
I_k　：第 k 期首の部品在庫量
J_k　：第 k 期首に生産指示かんばんポスト内にある生産指示かんばん枚数
L　：部品の納入リードタイム
P_k　：第 k 期の生産量
M　：外注かんばん枚数
N　：生産指示かんばん枚数
$V_k=B_k+J_k$：第 k 期首の総繰り越し需要
X_k　：第 k 期首の状態（3 章で定める。）

生産能力分布を $F(z)$，需要分布を $G(z)$で表す。

$$F(z)=\Pr\{C_k=z\},\quad 0\leq z\leq C_{\max} \tag{1}$$

$$G(z)=\Pr\{D_k=z\},\quad 0\leq z \tag{2}$$

である。第 $k+1$ 期首の部品在庫量 I_{k+1} は，第 k 期首の部品在庫量と第 $k+1$ 期首に納入される部品の和から第 k 期の生産量 P_k を引いた値である。第 $k+1$ 期首に納入される部品は，第 $k-L$ 期の生産量 P_{k-L} であるから，

$$P_k=\min\{I_k,\ J_k,\ C_k\} \tag{3}$$

である。第 $k+1$ 期首の総繰り越し需要 V_{k+1} は，第 k 期首の総繰り越し需要に第 k 期の需要量 D_k を加え，第 k 期の生産量 P_k を引いたものであり，

$$V_{k+1}=V_k+D_k-P_k \tag{4}$$

である。繰り越し需要 B_k と生産指示かんばんポスト内にある生産指示かんばん枚数 J_k は V_k より次のように定まる。

$$B_k = [V_k - M]^+ \tag{5}$$

$$J_k = \min\{M,\ V_k\} \tag{6}$$

部品納入リードタイムはLで，第i期の生産によって取り外される外注かんばん枚数はP_iであるため，$k=1, 2, \cdots$に対し，

$$I_k + \sum_{i=k-L}^{k-1} P_i = N \tag{7}$$

が得られる。第$k+1$期首の部品在庫量I_{k+1}は，第k期首の部品在庫量I_kと第$k+1$期首に納入される部品P_{k-L}の和から，第k期の生産量P_kを引いた値であり，

$$I_{k+1} = I_k + P_{k-L} - P_k \tag{8}$$

が得られる。式(3)と(6)より

$$P_k = \min\{I_k,\ V_k,\ C_k^M\} \tag{9}$$

である。ここで，C_k^Mは

$$C_k^M = \min\{C_k,\ M\} \tag{10}$$

である。図1にJIT生産システムを示した。

V_∞，B_∞，I_∞，J_∞を，それぞれ定常状態における期首の総繰り越し需要，期首の繰り越し需要，期首の部品在庫量，期首に生産指示かんばんポスト内にある生産指示かんばん枚数とする。外注かんばん枚数M，生産指示かんばん枚数Nに対し，定常状態における1期間当たりの平均総費用$A(M, N)$を以下のように定める。

$$\begin{aligned} A(M, N) = {} & A_I(E(I_\infty) - 1/2D) + B_I(M - E(J_\infty)) + A_B(E(B_\infty)) \\ & + (A_O + A_w)D + C_B \Pr\{B_\infty > 0\} \end{aligned} \tag{11}$$

ここでE()は期待値を表し，

A_I=1部品1期当たりの在庫費用。

B_I=1製品1期当たりの在庫費用。

A_B=1製品1期当たりの繰り越し需要費用。

A_O=1部品当たりの発注費用。

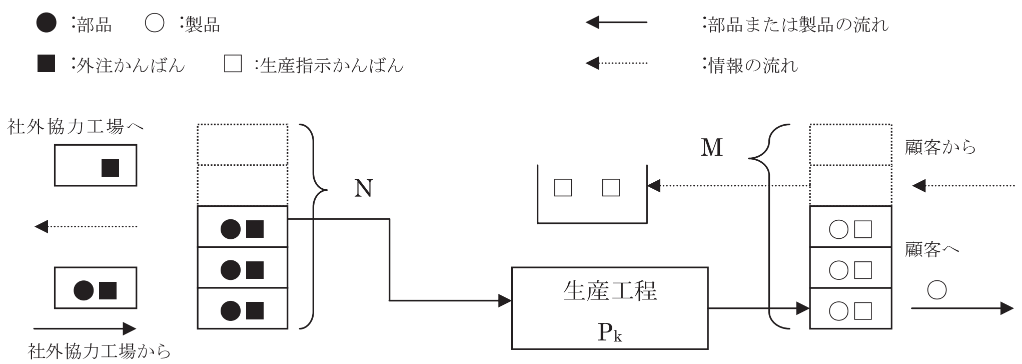

図1　JIT生産システム

A_w＝1部品当たりの引き取り費用。

C_B＝1繰り越し需要発生費用。

である。

式（5），（6）より，

$$J_\infty = \min\{M,\ V_\infty\} \tag{12}$$

$$B_\infty = [V_\infty - M]^+ \tag{13}$$

である。式(12)，(13)より，$E(J_\infty)$と$E(B_\infty)$は次のように表せる。

$$E(J_\infty) = \sum_{i=1}^{M} i \times \Pr\{V_\infty = i\} + M(1 - \sum_{i=0}^{M} \Pr\{V_\infty = i\}) \tag{14}$$

$$E(B_\infty) = E(V_\infty) - E(J_\infty) \tag{15}$$

式(13)より，

$$\Pr\{B_\infty > 0\} = 1 - \sum_{i=0}^{M} \Pr\{V_\infty = i\} \tag{16}$$

が得られる。

3　マルコフ連鎖の定義

第k期首の状態を表す$L+2$次元ベクトル$X_k = (x_1, \cdots, x_{L+2})$を次のように定める。

$$x_i = P_{k-i},\ 1 \le i \le L \tag{17}$$

$$x_{L+1} = I_k \tag{18}$$

$$x_{L+2} = V_k \tag{19}$$

X_kは，第k期首における発注済みで未納の部品$x_1, \cdots, x_L$と部品在庫量x_{L+1}，製品の総繰り越し需要x_{L+2}から構成される。式（7），(17)，(18)より

$$\sum_{i=1}^{L+1} x_i = N \tag{20}$$

$$0 \le x_i \le M_c,\ 1 \le i \le L \tag{21}$$

が成り立つ。ここで$M_c = \min\{C_{\max},\ M\}$である。状態空間$T$を

$$T = \{(x_1, \cdots, x_{L+2}) \mid 0 \le x_i \le M_c (1 \le i \le L),\ 0 \le x_{L+1},\ \sum_{i=1}^{L+1} x_i = N, 0 \le x_{L+2}\}$$

によって定める。$\{X_n\}$はT上のマルコフ連鎖である。状態空間Tは，製品の総繰り越し需要の範囲によって，以下のように共通部分のない可算個の部分集合 level i（$i \ge 0$）に分割される。

$$\text{level } i = \{(x_1, \cdots, x_{L+2}) \mid 0 \le x_i \le M_c (1 \le i \le L),\ 0 \le x_{L+1},\ \sum_{i=1}^{L+1} x_i = N,\ iM_c \le x_{L+2} < (i+1) M_c\} \tag{22}$$

各 level の状態数は同一である。この共通の状態数をmとする。level 0 の状態を一定の順序で並べ，$a_{0,1}, \cdots a_{0,m}$とする。level 0 のj番目の状態$a_{0,j} = (x_1^j, \cdots, x_{L+2}^j) \in$ level 0 に対する level i ($i \ge 1$)のj番目の状態$a_{i,j} = (y_1^j, \cdots, y_{L+2}^j)$を次のように定める。

$$y_k^j = x_k^j,\ 1 \le k \le L+1 \tag{23}$$

$$y^j_{L+2}=x^j_{L+2}+iM_c \tag{24}$$

T の状態を，level の昇順に並べ，level i においては，$a_{i,1}$, $\cdots a_{i,m}$ と並べることで，T のすべての状態を一列に並べることができる。T の状態について上記の並べ方に対する $\{X_n\}$ の推移確率行列を P とする。

式(1)，(9)より，P_k が z である確率 $\Pr(P_k=z)$ は

$$\Pr(P_k=z)=F(z),\quad 0\leq z<\min\{I_k, V_k\} \tag{25}$$

$$\Pr(P_k=z)=\Pr(P_k=z)=\sum_{w=z}^{C_{\max}} F(w),\quad z=\min\{I_k, V_k\} \tag{26}$$

で表される。式(2)，(8)，(9)と式(25)，(26)より，X_n が与えられたときの X_{n+1} の条件付き確率が，以下のように(a)と(b)の場合に分けて示される。

(a)　$a_{0,j}=(x^j_1, \cdots, x^j_{L+1}, x^j_{L+2})\in$level 0，$a_{i,h}=(x^h_1, \cdots, x^h_{L+1}, x^h_{L+2}+iM_c)\in$level i の場合

$$\Pr(X_{n+1}=a_{i,h}\,|\,X_n=a_{0,j})=F(x^h_1)G(x^h_{L+2}+iM_c\text{-}x^j_{L+2}+x^h_1)$$

$$\begin{aligned}&\text{if}\quad 0\leq x^h_1<\min\{x^j_{L+1},\ x^j_{L+2}\}\ \text{and}\\ &\quad x^h_t=x^j_{t-1},\ 2\leq t\leq L\qquad \text{and}\\ &\quad x^h_{L+1}=x^j_{L+1}+x^j_L-x^h_1\end{aligned} \tag{27}$$

$$\Pr(X_{n+1}=a_{i,h}\,|\,X_n=a_{0,j})=\sum_{w=x^h{}_1}^{C\max} F(w)G(x^h_{L+2}+iM_c-x^j_{L+2}+x^h_1)$$

$$\begin{aligned}&\text{if}\quad x^h_1=\min\{x^j_{L+1},\ x^j_{L+2},\ M_c\}\ \text{and}\\ &\quad x^h_t=x^j_{t-1},\ 2\leq t\leq L\qquad \text{and}\\ &\quad x^h_{L+1}=x^j_{L+1}+x^j_L-x^h_1\end{aligned} \tag{28}$$

$$\Pr(X_{n+1}=a_{i,h}\,|\,X_n=a_{0,j})=0\ \text{otherwise} \tag{29}$$

(b)　$a_{i,j}=(x^j_1, \cdots, x^i_{L+1}, x^j_{L+2}+iM_c)\in$level i，$a_{i+k,h}=(x^h_1, \cdots, x^h_{L+1}, x^h_{L+2}+(i+k)M_c)$ $\in$level $i+k$ の場合

$(i\geq 1,\ k\geq -1)$

$$\Pr(X_{n+1}=a_{i+k,h}\,|\,X_n=a_{i+j})=F(x^h_1)G(x^h_{L+2}+kM_c-x^j_{L+2}+x^h_1)$$

$$\begin{aligned}&\text{if}\quad 0\leq x^h_1<\min\{x^j_{L+1},\ M_c\}\ \text{and}\\ &\quad x^h_t=x^j_{t-1},\ 2\leq t\leq L\qquad \text{and}\\ &\quad x^h_{L+1}=x^j_{L+1}+x^j_L-x^h_1\end{aligned} \tag{30}$$

$$\Pr(X_{n+1}=a_{i+k,h}\,|\,X_n=a_{i,j})=\sum_{w=x^h{}_1}^{C\max} F(w)G(x^h_{L+2}+kM_c-x^j_{L+2}+x^h_1)$$

$$\begin{aligned}&\mathit{if}\quad x^h_1=\min\{x^j_{L+1},\ M_c\}\ \text{and}\\ &x^h_t=x^j_{t-1},\ 2\leq t\leq L+1\end{aligned} \tag{31}$$

$$\Pr(X_{n+1}=a_{i+k,h}\,|\,X_n=a_{j,i})=0\ \text{otherwise} \tag{32}$$

式(30)～(32)より，$\Pr(X_{n+1}=a_{i+k,h}\,|\,X_n=a_{i,j})$は，$i\geq 1$ の場合，i に無関係に (k, j, h) によって定まる。各期の生産量は M_c 以下であるから，$x\in$ level $i(i\geq 1)$ に対し $\Pr(X_{n+1}=y\,|\,X_n=x)$

>0 をみたす y は，$\bigcup_{j=i-1}^{\infty}$ level j に含まれる。故に，推移確率行列 P は次の形に表せる。

$$P=\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{33}$$

式(33)で，各 B_i 及び A_i は $m\times m$ 行列である。B_i は level 0 から level $i(i\geq 0)$ への状態推移を表し，A_i は level k から level $k+i-1(k\geq 1, i\geq 0)$ への状態推移を表す。

4　M/G/1 型マルコフ連鎖の性質

$m\times m$ 確率行列 A を次のように定める。

$$A=\sum_{i=0}^{\infty} A_i \tag{34}$$

この JIT 生産システムでは，行列 A は 2 個以上の再帰類を持つ場合がある。各 level 内で状態を並び替えることにより，A は次の基準形になる（[7]）。

$$A=\begin{pmatrix} H(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H(r) & 0 \\ T(1) & \cdots & \cdots & T(r) & T(0) \end{pmatrix} \tag{35}$$

ここで，r は A の再帰類の個数で，$H(k)$ は，$t_k\times t_k$ 既約確率行列，$T(k)$ は $t_0\times t_k$ 行列である。t_i $(1\leq i\leq r)$ は第 i 再帰類の要素の個数で，t_0 は推移類の要素の個数である。このとき各 A_i は次の形に表せる。

$$A_i=\begin{pmatrix} H_i(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_i(r) & 0 \\ T_i(1) & \cdots & \cdots & T_i(r) & T_i(0) \end{pmatrix} \tag{36}$$

$H_i(k)$ は，$t_k\times t_k$ 行列，$T_i(k)$ は $t_0\times t_k$ 行列である。$H(i)$ は既約確率行列なので，定常分布 p_i が存在し，

$$p_iH(i)=p_i,\ p_ie_{ti}{}^T=1,\quad 1\leq i\leq r \tag{37}$$

をみたす。ρ_i を

$$\rho_i=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\infty} jp_iH_j(i)e_{t_i}{}^T,\quad 1\leq i\leq r \tag{38}$$

で定める。次の補題が成り立つ。

補題　非負整数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ に対し，v_n，v'_nを $C^M{}_n=c_n$，$D_n=d_n$としたとき得られる第 n 期首の総繰り越し需要とする。ある定数 k_0に対し，条件 $v_n\leq v'_n+k_0(1\leq n\leq L+1)$が成り立てば v_n

$\leq v'_n+k_0$ が $1\leq n$ に対して成り立つ。
補題を用いて定理1～定理4が示せる。

定理1　$\rho_i(1\leq i\leq r)$ はすべて等しい。この値を ρ で表すと，$\rho=\dfrac{D}{M_c}+b$ と記せる。ここで，定数 b は，生産能力分布 $F(z)$，部品納入リードタイム L，外注かんばん枚数 N，生産指示かんばん枚数 M によって定まる。

$D_{\min}$ を $\min\{x\mid G(x)>0\}$ によって定める。$\alpha^0=(\alpha^0_1,\cdots,\alpha^0_{L+2})\in$ level 0 を $\alpha^0_i=D_{\min}(1\leq i\leq L)$，$\alpha^0_{L+1}=N-LD_{\min}$，$\alpha^0_{L+2}=D_{\min}$ によって定める。このとき次が成り立つ。

定理2　$D_{\min}<M_c$ かつ $(L+1)D_{\min}<N$ ならば，状態空間 T に含まれるすべての状態は α^0 に accessible である。

定理3　定理2のいずれかの条件が成り立たず，かつ需要分布 $G(z)$ の分散が正ならば，総繰り越し需要 V_n は確率1で無限大に発散する。

定理2と定理3より，以下では定理2の条件が成り立ち，需要分布 $G(z)$ の分散が正の場合を考える。状態空間 T の部分集合 U を次のように定める。

$U=\{x\mid \alpha^0 \text{ is accessible to } x\}$。

$\Pr\{X_{n+1}=\alpha^0\mid X_n=\alpha^0\}>0$ が成り立つため，定理3より U は状態空間 T に含まれる aperiodic irreducible class であり，T の他の class は transient である。次が成り立つ。

定理4　U が positive recurrent であるための必要十分条件は，$\rho<1$ である。

定理4より，条件 $\rho<1$ をシステムの安定条件と見なすことができる。部品納入リードタイム L，生産指示かんばん枚数 M，外注かんばん枚数 N，生産能力分布 $F(x)$ が与えられたとき安定条件をみたす1期の平均需要の上限を Dsup とする。ρ_0 を平均需要 $D=0$ のときの ρ の値とすれば，定理1と定理4より

$$\mathrm{Dsup}=M_c(1-\rho_0) \tag{39}$$

が得られる。

5　システムの性能評価

(1) 定常分布

式(40)をみたす定常分布を $\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots)$ とする。

$$\pi P=\pi,\quad \pi e_\infty{}^T=1 \tag{40}$$

ただし，π_i は m 次元ベクトルとし，$e_\infty=(1,1,\cdots)$ とする。$\pi_i=(\pi_{i,j})$ $(1\leq j\leq m)$ とする。level 0 の j 番目の状態 $a_{0,j}$ を，$a_{0,j}=(x^j_1,\cdots,x^j_{L+1},x^j_{L+2})$ で表し，$v=(x^1{}_{L+2},\cdots,x^m{}_{L+2})$ とすると，定常状態における期首の平均総繰り越し需要 $E(V_\infty)$ は，

$$E(V_\infty)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\pi_{i,j}(x^j_{L+2}+iM_c) \tag{41}$$

で与えられる。m 次元ベクトル e_m を $e_m=(1,\cdots,1)$ とする。

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} i\pi_{i,j}=\sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i e_m{}^T \tag{42}$$

$$p=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i \tag{43}$$

とすれば $E(V_\infty)$ は，

$$E(V_\infty)\ =M_c u+pv^T \tag{44}$$

と表せる。level $k(1\leq k)$ の状態 $a_{k,i}$ を初期状態とする level $k-1$ への初到達時間は，推移確率行列 P の形から k に依存することなく定まり，これを $t(i)$ で表す。$m\times m$ 行列 $G=(G_{i,j})$ $(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m)$ を

$$G_{i,j}=\sum_{n=1}^{\infty} P(X_{t(i)}=a_{k-1,J},\ t(i)=n\mid X_0=a_{k,i}) \tag{45}$$

で定める。[7]，[8]より G は行列の非線形方程式

$$X=\sum_{k=0}^{\infty} A_k X^k \tag{46}$$

に対する非負の最小解であり，iteration method によって求められる。level 0 でのみ $\{X_n\}$ を観測して得られる level 0 上のマルコフ連鎖を $\{Y_n\}$ とする。$\{Y_n\}$ の推移確率行列 Q は

$$Q=\sum_{i=0}^{\infty} B^i G^i \tag{47}$$

で与えられる。$\{Y_n\}$ の定常分布を q とすれば，q は

$$qQ=q,\ \ qe_m{}^T=1 \tag{48}$$

によって得られる。[8]より，正規化定数 $\theta>0$ が存在し，$\{X_n\}$ の level 0 の定常確率 π_0 は

$$\pi_0=\frac{q}{\theta} \tag{49}$$

と表せる。$\{X_n\}$ の平衡分布 π の level に関する確率母関数ベクトル $\pi(z)$ を

$$\pi(z)=\sum_{i=0}^{\infty} z^i\pi_i,\ \ |z|\leq 1$$

とする。式(42)，(43)における u と p は

$$u=\pi^{(1)}(1)e_m{}^T \tag{50}$$

$$p=\pi(1) \tag{51}$$

と表せる。$\pi^{(n)}(z)$ は $\pi(z)$ に対する n 階導関数を表す。

(2) $E(V_\infty)$，$E(J_\infty)$，$E(B_\infty)$，$\Pr(B_\infty>0)$ の計算

$A(z)=\sum_{i=0}^{\infty} z^i A_i$，$B(z)=\sum_{i=0}^{\infty} z^i B_i$ とする。$A=A(1)=\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ である。式(35)に対応して $A(z)$ は，$t_i\times t_i$ 行列 $H(i,z)$ $(i=1,\cdots,r)$ と $t_0\times t_i$ 行列 $T(i,z)$ $(i=0,\cdots,r)$ によって次のように表せる。

$$A(z)=A(r)=\begin{pmatrix} H(1,z) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H(r,z) & 0 \\ T(1,z) & \cdots & \cdots & T(r,z) & T(0,z) \end{pmatrix} \tag{52}$$

$H(i)=H(i,1)$（$i=1,\cdots,r$），$T(i)=T(i,1)$（$i=0,\cdots,r$）である。

$\{Y_n\}$ の平衡分布 q に対し，t_i 次元ベクトル $\tilde{u}(i,z)$ を

$q(zB(z)-A(z))=(\tilde{u}(1,z),\ \cdots,\ \tilde{u}(r,z),\ \tilde{u}(0,z))$

によって定める。u と p は以下のように求められる。

$$\tilde{\pi}(0,1)=\tilde{u}(0,1)(I_{t_0}-T(0,1))^{-1} \tag{53}$$

$$\tilde{\pi}^{(1)}(0,1)=(\tilde{u}^{(1)}(0,1)-\tilde{\pi}(0,1)+\tilde{\pi}(0,1)T^{(1)}(0,1))(I_{t_0}-T(0,1))^{-1} \tag{54}$$

$$\tilde{\pi}^{(2)}(0,1)=(\tilde{u}^{(2)}(0,1)-2\tilde{\pi}^{(1)}(0,1)+2\tilde{\pi}^{(1)}(0,1)T^{(1)}(0,1) \\ +\tilde{\pi}(0,1)T^{(2)}(0,1))\times(I_{t_0}-T(0,1))^{-1} \tag{55}$$

$$v_i^0=\tilde{u}(i,1)+\tilde{\pi}(0,1)T(i,1),\ 1\le i\le r \tag{56}$$

$$w_i^0=\tilde{u}^{(1)}(i,1)+\tilde{\pi}(0,1)T^{(1)}(i,1)+\tilde{\pi}^{(1)}(0,1)T(i,1),\ 1\le i\le r \tag{57}$$

$$\tilde{z}_i^0=\frac{v_i^0(I_{t_i}-H(i,1)+e_{t_i}{}^T p_i)^{-1}H^{(1)}(i,1)e_{t_i}{}^T+w_i^0 e_{t_i}{}^T}{(1-\rho)},\ 1\le i\le r \tag{58}$$

$$\tilde{\pi}(i,1)=v_i^0(I_{t_i}-H(i,1)+e_{t_i}{}^T p_i)^{-1}+\tilde{z}_i^0 p_i,\ 1\le i\le r \tag{59}$$

$$v_i^1=\tilde{u}^{(1)}(i,1)-\tilde{\pi}(i,1)+\tilde{\pi}(0,1)T^{(1)}(i,1)+\tilde{\pi}^{(1)}(0,1)T(i,1) \\ +\tilde{\pi}(i,1)H^{(1)}(i,1),\ 1\le i\le r \tag{60}$$

$$w_i^1=\tilde{u}^{(2)}(i,1)+\tilde{\pi}(0,1)T^{(2)}(i,1)+2\tilde{\pi}^{(1)}(0,1)T^{(1)}(i,1) \\ +\tilde{\pi}^{(2)}(0,1)T(i,1)+\tilde{\pi}(i,1)H^{(2)}(i,1),\ 1\le i\le r \tag{61}$$

$$\tilde{z}_i^1=\frac{2v_i^1(I_{t_i}-H(i,1)+e_{t_i}{}^T p_i)^{-1}H^{(1)}(i,1)e_{t_i}{}^T+w_i^1 e_{t_i}{}^T}{2(1-\rho)},\ 1\le i\le r \tag{62}$$

$$\theta=\tilde{\pi}(0,1)e_{t_0}{}^T+\sum_{i=1}^{r}\tilde{z}_i^0 \tag{63}$$

$$u=\frac{\tilde{\pi}^{(1)}(0,1)e_{t_0}{}^T+\sum_{i=1}^{r}\tilde{z}_i^1}{\theta} \tag{64}$$

$$p=\frac{(\tilde{\pi}(1,1),\cdots,\tilde{\pi}(r,1),\tilde{\pi}(0,1))}{\theta} \tag{65}$$

$E(V_\infty)$は式(41)，(64)，(65)により求められる。式(48)，(63)で定まる q，θ に対し，

$$\pi_0=\frac{q}{\theta} \tag{66}$$

とする。定常確率 π_i（$i=1,2,\cdots$）は次のように計算される。

$$\pi_i=(\pi_0\overline{B}_i+\sum_{j=1}^{i-1}\pi_j\overline{A}_{i+1-j})(I_m-\overline{A}_1)^{-1} \tag{67}$$

ここで，$\overline{B}_i$と$\overline{A}_i$ は

$$\overline{B}_i=\sum_{j=i}^{\infty}B_jG^{j-i}$$

$$\overline{A}_i=\sum_{j=i}^{\infty}A_jG^{j-i}$$

である。(66)，(67)より $\Pr(V_\infty=i)$ が求められ，(14)，(15)，(16)より $E(J_\infty)$，$E(B_\infty)$，$\Pr(B_\infty>0)$ が得られる。

6　性能評価アルゴリズム

生産指示かんばん枚数 M，外注かんばん枚数 N，部品納入リードタイム L，生産能力分布 $F(x)$，製品需要分布 $G(x)$ に対する性能評価アルゴリズムを示す。

Step 1.　十分小さな2つの正数 ε_1 と ε_2 を定める。

Step 2.　整数 k_0 を $(I_m-\sum_{i=0}^{k_0}A_i)e_m{}^T<\varepsilon_1 e_m{}^T$，$(I_m-\sum_{i=0}^{k_0}B_i)e_m{}^T<\varepsilon_1 e_m{}^T$ が共に成り立つように定める。

Step 3.　$A=\sum_{i=0}^{k_0}A_i$ とする。各level内で状態を並び替え，行列 A を式(35)の基準形とする。基準形を得るためにマルコフ連鎖の状態分類アルゴリズム（[10]）を用いる。

Step 4.　式(38)により ρ を計算する。ρ が1以上ならばシステムは安定条件をみたさないため，停止する。

Step 5.　$n\leftarrow 1$；$G_n\leftarrow I_m$

Step 6.　$n\leftarrow n+1$

Step 7.　$G_n\leftarrow \sum_{i=0}^{k_0}A_i G_{n-1}{}^i$

Step 8.　条件 $\max_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le m}}|(G_n)_{i,j}-(G_{n-1})_{i,j}|\ge\varepsilon_2$ が成り立てばStep 6へ行く。成り立たなければStep 9へ行く。

Step 9.　$G\leftarrow G_n$

Step 10.　$Q\leftarrow \sum_{i=0}^{k_0}B_i G^i$

Step 11.　連立一次方程式 $qQ=q$，$qe_m{}^T=1$ を解く。

Step 12.　u と p を5.(2)により求める。

Step 13.　$E(V_\infty)\leftarrow M_c u+pv^T$；$E(I_\infty)\leftarrow N-LD$

Step 14.　(66)，(67)，(14)，(15)，(16) より $E(J_\infty)$，$E(B_\infty)$，$\Pr(B_\infty>0)$ を求める。

Step 15.　Set $A(M,N)=A_I(E(I_\infty)-1/2D)+B_I(M\text{-}E(J_\infty))+A_B(E(B_\infty))+(A_{O+}A_w)D+C_B\Pr\{B_\infty>0\}$

7　計算例

1期間の公称の生産能力 $C_{\max}=5$ とし，生産能力として，以下の(a)～(d)を使用した。

(a) $F(5)=1.0$（故障無し，平均生産能力 =5，生産能力分散 =0）

(b) $F(5)=0.7$，$F(4)=0.2$，$F(3)=0.1$（平均生産能力 =4.6，生産能力分散 =0.44）

(c) $F(5)=0.4$, $F(4)=0.3$, $F(3)=0.2$, $F(2)=0.1$（平均生産能力 =4.0，生産能力分散 =13.33）

(d) $F(5)=0.7$, $F(4)=0.2$, $F(0)=0.1$（平均生産能力 =4.3，生産能力分散 =15.696）

部品納入のリードタイム $L=2$ とする。図2に生産指示かんばん枚数 M が5以上の場合に外注かんばん枚数 N が変化するとき式(39)によって得られる Dsup の値を示した。

図3に1期間の需要量が平均3のポアソン分布に従う場合に，外注かんばん枚数 N が変化するときの在庫総費用 $A(M, N)$ の変化を示した。ただし，図3では費用係数は $A_I=1.0$, $A_O+A_W=10.0$, $B_I=5.0$, $C_B=100.0$, $A_B=0$ とした。表1に1期間の需要量が平均3のポアソン分布に従う場合に，総費用 $A(M, N)$ を最小にする生産指示かんばん枚数 M^* と外注かんばん枚数 N^* の値を示した。

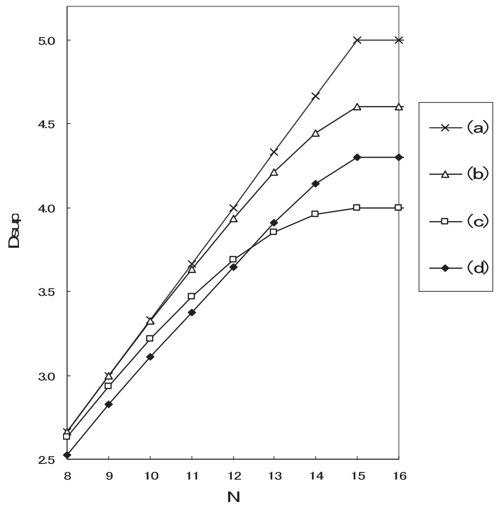

図２　Dsup の値の変化（M≧5）

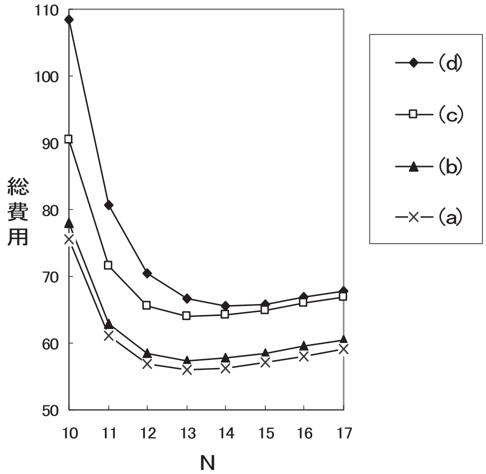

図３　平均総費用の変化（M＝6）

表１　最適かんばん枚数

	(a)	(b)	(c)	(d)
M*	6	6	7	7
N*	13	13	13	13

8　結言

本論文では，製品需要と生産能力が互いに独立な一般分布に従い，生産指示かんばんと外注かんばんを用いる JIT 生産システムの性能評価を行った。システムの状態変化を M/G/1 型マルコフ連鎖で表し，いくつかの性質を示し，在庫総費用を求める方法を導き，数値例を示した。性能評価には，M/G/1 型マルコフ連鎖に対する定常分布のモーメントの計算を用いた推移確率行列の規則性を利用した性能評価は，本研究のような単一工程生産在庫システムだけでなく，

多工程生産在庫システムの性能評価にも適用できると考えられる。今後は生産在庫システムの特性に対応した性能評価アルゴリズムを考えたい。

参考文献

［1］ MONDEN, Y., 1993. Toyota Production System：Practial Approach to Production Management. 2nd ed. Industrial Engineering and Management Press, Norcross, Georgia

［2］ KAMARKAR, U.and KERME, S., 1989. Batch policy in kanban systems. J. Manuf. Sys. 8, 317-328.

［3］ MITRA, D. and MITRANI, I., 1990. Analysis of a kanban discipline for cell coordination in production lines Ⅰ. Mgmt.Sci.36, 1548-1566.

［4］ DI MASCOLO, M. FREIN, Y., 1996. An Analytical Method for Performance Evaluation of Kanban Controlled Production Systems. Oprns. Res. 44, 50-64.

［5］ DELEERSNYDER, J.L., T. J. HODGSON, H. MULLER and P. J. O'GRAY., 1989. Kanban Controlled Pull Systems：An Analytic Approach. Mgmt. Sci. 35, 1079-1091.

［6］ OHNO, K., NAKASHIMA, K., KOJIMA, M., 1995. Optimal numbers of kanbans in a JIT production system. Int. J. Prod. Res. 33, 1387-1401.

［7］ KIJIMA, M., 1997. Markov Processes for Stochastic Modeling.Chapman & Hall

［8］ NEUTS, M.F., 1989. Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications. Marcel Dekker

［9］ 牧本直樹，2001．待ち行列アルゴリズム―行列解析的アプローチ．朝倉書店

［10］ RAMASWAMI, V., 1988. A Stable Recursion for the Steady State Vector in Markov Chains of M/G/1 Type. Stochastic Models, 4, 1, 183-188

［11］ FOX, B. L., LANDI, D. M., 1968. An Algorithm for Identifying the Ergodic Subchains and Transient States of a Stochastic Matrix. Comm. ACM. 11, 9, 619-621.