

## 多工程 JIT 生産在庫システムの性能評価

岩瀬 雅治・浜田 直道

**要旨**：本研究では、引き取りかんばんと生産指示かんばんを持ち単一品種の製品を生産する直列型多工程 JIT 生産在庫システムの定常状態解析を行う。製品需要と各工程の生産能力はそれぞれ独立で同一の確率分布に従うとする。対象システムを離散時間 M/G/1 型マルコフ連鎖として表現し、行列解析法による性能評価を行い、数値例を示す。

### 1 はじめに

ジャストインタイム生産在庫システムは、生産における無駄なコストを削減することを主目的として導入され、生産現場や大学等で様々な研究が行われてきた。ジャストインタイム生産在庫システムにおける生産管理方法の特徴は、引き取り型生産が行われることである。ジャストイン生産在庫システムにおいて、各工程は先行する工程から生産に必要な量の部品を必要な時間に引き取り、先行する工程は引き取られた量だけ部品の生産を行う。かんばんは、引き取り型生産管理を行うために各工程で用いられる。かんばんを利用した生産メカニズムの詳細は、MONDEN(1993)に述べられている。

ジャストインタイム生産在庫システムについて、これまでに多くの研究が行われてきたが、その大部分はシミュレーションによる性能評価である。解析的方法を用いた研究には KAMARKAR and KERME[1]、DELEERSNDER et al.[2]、MITRA and MITRANI[3][4]、MATTA et al.[5]、OHNO et al.[6]等がある。これらの論文では、マルコフ連鎖によるモデル化と性能評価が行われている。ジャストインタイム生産在庫システムで使用されるかんばんには、引き取りかんばんと生産指示かんばんがある。上記の研究のうち、KAMARKAR and KERME[1]、OHONO et al.[6]はこれら2種類のかんばんを用いた生産在庫システムについて解析しているが、他の研究では生産指示かんばんのみを用いた生産在庫システムを対象としている。一方、実際の工程においては、2種類のかんばんを用いた場合が多く見られる(MONDEN[7]、BERKLEY[8])。

本研究では2種類のかんばんを持ち単一品種の製品を生産する直列型多工程 JIT 生産在庫システムを離散時間 M/G/1 型マルコフ連鎖によってモデル化し、定常状態解析を行う。製品需要と各工程の生産能力はそれぞれ独立で同一の確率分布に従うとする。本研究で対象とする生産在庫システムは、OHNO et al.[6]で扱ったシステムを多工程の場合に拡張したものである。

M/G/1 型マルコフ連鎖は、通信システムの解析等、客の到着分布とサービス時間分布がそれぞれ一般分布に従う広い分野の性能評価に用いられている。NEUTS[10]に、M/G/1 型マルコフ連鎖について性能評価アルゴリズムと応用例が詳述されている。

本論文の概要は以下のとおりである。第 2 章において対象とするジャストイン生産在庫システムの説明を行う。第 3 章においてモデル化に用いる M/G/1 型マルコフ連鎖について説明する。第 4 章においてシステムの費用構造を示し、性能評価アルゴリズムを提示する。第 5 章に数値例を示す。

## 2 多工程 JIT 生産在庫システム

単一品種の製品を生産する工程数  $m$  の直列型生産在庫システムを考える。各工程における部品の発注と部品の発送、部品の納入は各期首に行われるとする。 $m$  個の工程を、上流から下流に向かい、第 1 工程、第 2 工程、 $\dots$ 、第  $m$  工程と記す。各工程では、それぞれ生産指示かんばんと引き取りかんばんが用いられる。第  $i$  工程における引き取りかんばん枚数を  $N_i$ 、生産指示かんばん枚数を  $M_i$  とする。第  $i$  工程の部品納入リードタイムを  $L_i$  とする。各期の製品需要量  $D(n)$  は独立で同一な分布に従うとし、満たされない需要は繰り越されるとする。各期の製品需要量の分散は正の値であるとする。第  $i$  工程、 $i=1, \dots, m$  における各期の生産能力は工程毎に定まる分布に従うとする。以下の記号を用いる。

$T_i(n)$  : 第  $n$  期首において第  $i-1$  工程から第  $i$  工程に発送される部品量

$T_{m+1}(n)$  : 第  $n$  期首において第  $m$  工程から供給される製品量

$I_i(n)$  : 第  $n$  期首における第  $i$  工程の部品在庫量

$J_i(n)$  : 第  $n$  期首における第  $i$  工程の製品在庫量

$B(n)$  : 第  $n$  期首における製品の総受注残

$B'(n)$  : 第  $n$  期首における製品の受注残

$P_i(n)$  : 第  $n$  期における第  $i$  工程の生産量

$C_i(n)$  : 第  $n$  期における第  $i$  工程の生産能力

$C_{i,\max}$  : 第  $i$  工程の公称生産能力

$d_{\min}$  : 各期の需要量の最小値

$D$  : 各期の需要量の平均

$F_i(x) = \Pr\{C_i(n) = x\}$

$G(x) = \Pr\{D(n) = x\}$

$M_{Ci} = \min\{M_i, C_{i,\max}\}$

ここで、総受注残  $B(n)$  は受注残  $B'(n)$  と生産指示ポストにあるかんばん枚数を加えた値をあらわす。図 1 に、この直列型生産在庫システムを示した。

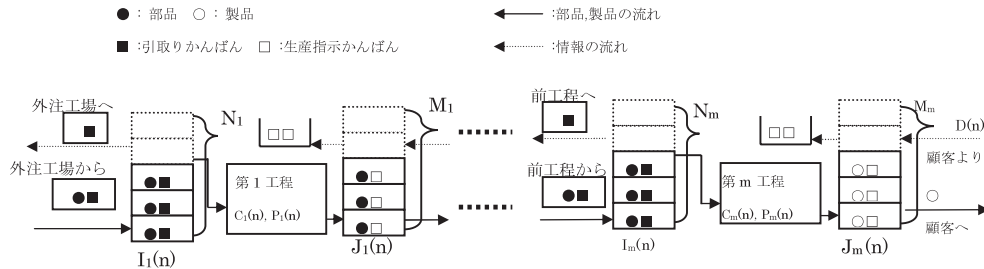


図1 直列型  $m$  工程 JIT 生産在庫システム

$M_i - J_i(n)$  は、第  $n$  期首における第  $i$  工程の生産指示ポストにある生産指示かんばん枚数をあらわす。第  $n$  期首における総受注残  $B(n)$  と受注残  $B'(n)$ 、製品在庫量  $J_m(n)$  は以下の関係を見たす。

$$B(n) = B'(n) + (M_m - J_m(n)) \quad (1)$$

$$B'(n) = (B(n) - M_m)^+ \quad (2)$$

$$J_m(n) = (M_m - B(n))^+ \quad (3)$$

第  $n+1$  期の第  $i$  工程の生産量は、第  $i$  工程の部品在庫量、第  $i$  工程の生産指示ポストにおける生産指示かんばん枚数、第  $i$  工程の生産能力の最小値であり、式(4)、(5)が成り立つ。

$$P_i(n) = \min\{I_i(n), M_i - J_i(n), C_i(n)\}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (4)$$

式(3)、(4)より式(5)が成り立つ。

$$P_m(n) = \min\{I_m(n), M_m, B(n), C_m(n)\} \quad (5)$$

このとき、第  $n+1$  期首において第  $i-1$  工程から第  $i$  工程に発送される部品量  $T_i(n+1)$  は

$$T_1(n+1) = N_1 - \sum_{j=0}^{L_1-1} T_1(n-j) - I_1(n) + P_1(n) \quad (6)$$

$$T_i(n+1) = \min\{N_i - \sum_{j=0}^{L_i-1} T_i(n-j) - I_i(n) + P_i(n), J_{i-1}(n) + P_{i-1}(n)\}, \quad 2 \leq i \leq m \quad (7)$$

によって定まる。第  $n+1$  期首において第  $m$  工程から供給される製品量  $T_{m+1}(n+1)$  は

$$T_{m+1}(n+1) = \min\{B'(n) + D(n), J_m(n) + P_m(n)\} \quad (8)$$

である。

第  $n+1$  期首における部品在庫量と製品在庫量、総繰り越し需要量は

$$I_i(n+1) = I_i(n) + T_i(n - L_i + 1) - P_i(n) \quad (9)$$

$$J_i(n+1) = J_i(n) + P_i(n) - T_{i+1}(n+1), \quad 1 \leq i \leq m \quad (10)$$

$$B(n+1) = B(n) - P_m(n) + D(n) \quad (11)$$

である。

### 3 M/G/1 型マルコフ連鎖

第  $n$  期首における部品の発送と製品の供給直後の第  $i$  工程の状態を表すベクトル  $s_i$  を以下のように定める。

$$s_i = (T_i(n), \dots, T_i(n-L_i+1), I_i(n), J_i(n)), \quad \text{if } 1 \leq i \leq m-1 \text{ and } 1 \leq L_i \quad (12)$$

$$s_i = (I_i(n), J_i(n)), \quad \text{if } 1 \leq i \leq m-1 \text{ and } L_i = 0 \quad (13)$$

$$s_m = (T_m(n), \dots, T_m(n-L_m+1), I_m(n), B(n)), \quad \text{if } 1 \leq L_m \quad (14)$$

$$s_m = (I_m(n), B_m(n)), \quad \text{if } L_m = 0 \quad (15)$$

第  $n$  期首におけるシステムの状態を表すベクトル  $s$  を  $s = (s_1, \dots, s_m)$  とする。  $Z_+ = \{0, 1, \dots\}$  とする。  $Z_+^{L_i+2}$  の部分集合  $T_i (1 \leq i \leq m)$  を,

$$T_1 = \{(s_{1,1}, \dots, s_{1,L_1+2}) \mid s_{1,j} \in Z_+ (1 \leq j \leq L_1+2), \sum_{j=1}^{L_1+1} s_{1,j} = N_1, s_{1,L_1+2} \leq M_1\}$$

$$T_i = \{(s_{i,1}, \dots, s_{i,L_i+2}) \mid s_{i,j} \in Z_+ (1 \leq j \leq L_i+2), \sum_{j=1}^{L_i+1} s_{i,j} \leq N_i, s_{i,L_i+2} \leq M_i\}, 2 \leq i \leq m-1$$

$$T_m = \{(s_{m,1}, \dots, s_{m,L_m+2}) \mid s_{m,j} \in Z_+ (1 \leq j \leq L_m+2), \sum_{j=1}^{L_m+1} s_{m,j} \leq N_m\}$$

によって定める。

$$T = \{(s_1, \dots, s_m) \mid s_i = (s_{i,1}, \dots, s_{i,L_i+2}) \in T_i, \bigwedge_{i=1}^{m-1} (s_{i,L_i+2} = 0 \vee \sum_{j=1}^{L_{i+1}+1} s_{i+1,j} = N_{i+1})\}$$

とする。ここで  $\wedge$  は論理積を,  $\vee$  は論理和をあらわす。状態空間を  $T$  とし, 期首における JIT 生産在庫システムの状態推移をあらわすマルコフ連鎖を  $\{X_n\}$  とする。第  $n$  期首の状態が  $s = (s_1, \dots, s_m)$  のとき, 第  $n$  期の各工程の生産量が  $p = (p_1, \dots, p_m)$  で第  $n$  期の製品需要量が  $d$  である場合の第  $n+1$  期首の状態を  $s' = h(s, p, d)$  であらわす。

$s' = (s'_1, \dots, s'_m)$  とする。  $s_i = (s_{i,1}, \dots, s_{i,L_i+2}) \in T_i, \quad s'_i = (s'_{i,1}, \dots, s'_{i,L_i+2}) \in T_i$  とする。  $s'$  は以下のように定まる。式 (11) より

$$s'_{m,L_m+2} = s_{m,L_m+2} + d - p_m \quad (16)$$

が成り立ち, 式 (7), (12) より

$$s'_{i,1} = \min\{N_i - \sum_{j=1}^{L_i+1} s_{i,j} + p_i, s_{i-1,L_{i-1}+2} + p_{i-1}\}, \text{ if } 2 \leq i \leq m \text{ and } 1 \leq L_i \quad (17)$$

が成り立つ。式 (7), (9), (13) より

$$s'_{i,1} = \min\{N_i, s_{i-1,L_{i-1}+2} + p_{i-1} + s_{i,1} - p_i\}, \text{ if } 2 \leq i \leq m \text{ and } L_i = 0 \quad (18)$$

が成り立つ。式 (6), (12) より

$$s'_{1,1} = N_1 - \sum_{j=1}^{L_1+1} s_{1,j} + p_1, \quad \text{if } 1 \leq L_1 \quad (19)$$

が成り立ち, 式 (6), (9), (13) より

$$s'_{1,1} = N_1, \quad \text{if } L_1 = 0 \quad (20)$$

が成り立つ。式 (10) より

$$s'_{i,L_i+2} = s_{i,L_i+2} + p_i - s'_{i+1,1}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (21)$$

が成り立ち、式(12), (14)より

$$s'_{i,j} = s_{i,j-1}, \quad 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq L_i \quad (22)$$

が成り立つ。式(9), (12), (14)より

$$s'_{i,L_i+1} = s_{i,L_i+1} + s_{i,L_i} - p_i, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq L_i \quad (23)$$

が成り立つ。式(4), (5)より、 $s \in T$ に対し、期首の状態が $s$ のとき、その期の第 $i$ 工程の生産量の最大値 $U_i(s)$ は

$$U_i(s) = \min\{M_i - s_{i,L_i+2}, s_{i,L_i+1}, C_{m,\max}\}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (24)$$

$$U_m(s) = \min\{M_m, s_{m,L_m+2}, s_{m,L_m+1}, C_{m,\max}\} \quad (25)$$

によって定まる。 $K_i(s)$ を

$$K_i(s) = \{x \mid 0 \leq x \leq U_i(s)\}$$

とする。 $K_i(s)$ の直積集合 $K(s)$ を

$$K(s) = K_1(s) \times \dots \times K_m(s)$$

とする。期首の状態が $s$ のとき、第 $i$ 工程の生産量が $x$ である確率 $\Pr_i(x,s)$ は、

$$\Pr_i(x,s) = F_i(x) \quad \text{if } 0 \leq x < U_i(s)$$

$$\Pr_i(x,s) = \sum_{y=U_i(s)}^{C_{i,\max}} F_i(y) \quad \text{if } x = U_i(s)$$

によって定まる。故に、マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ の推移確率は、以下のようにあらわすことができる。

$$\Pr(X_{n+1} = s' \mid X_n = s) = \sum_{\substack{s' = h(s,p,d), \\ p = (p_1, \dots, p_m) \in K(s)}} \prod_{i=1}^m \Pr_i(p_i, s) \times \Pr(D_{(m)} = d) \quad (26)$$

式(26)では、 $p = (p_1, \dots, p_m)$ と $d$ は、 $p \in K(s)$ ,  $s' = h(s,p,d)$ をみたす範囲を動くものとする。

$M_{C_m} = \min\{M_m, C_{m,\max}\}$ とする。 $0 \leq i$ に対して、 $\{X_n\}$ の状態空間 $T$ の部分集合 level  $i$ を以下のように定める。

level  $i =$

$$\{s = (s_1, \dots, s_m) \mid s \in T, s_i \in T_i (1 \leq i \leq m), s_m = (s_{m,1}, \dots, s_{m,L_m+2}), iM_{C_m} \leq s_{m,L_m+2} < (i+1)M_{C_m}\} \quad (27)$$

状態空間 $T$ は level  $i$  ( $0 \leq i$ )の共通部分のない和集合として、

$$T = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \text{level } i$$

とあらわせる。各 level に含まれる状態数は同一であり、この値を $r$ とする。level 0の要素を一列に並べ、 $a_{0,1}, \dots, a_{0,r}$ とする。

$$a_{0,j} = (b_{j,1}, \dots, b_{j,m}), \quad b_{j,i} = (b_{j,i,1}, \dots, b_{j,i,L_i+2}) \in T_i (1 \leq i \leq m) \quad (28)$$

とおく。

level 0の各要素 $a_{0,j}$ に対し、level  $i$ の要素 $a_{i,j}$ を

$a_{i,j} = (b_{j,1}, \dots, b_{j,m-1}, b_{j,m}^i)$  とする。

ここで

$$b_{j,m}^i = (b_{j,m,1}, \dots, b_{j,m,L_{m+1}}, b_{j,m,L_{m+2}} + iM_{C_m}) \in T_m \quad (29)$$

と定める。状態空間  $T$  の部分集合  $\{a_{i,j} \mid 0 \leq i\}$  を NEUTS[9] に従い、phase  $j$  と記す。

$k \geq 1, k' \geq 1$  とする。同一の phase に属する 2 つの要素  $a_{k,j} = (b_{j,1}, \dots, b_{j,m-1}, b_{j,m}^k)$  と  $a_{k',j} = (b_{j,1}, \dots, b_{j,m-1}, b_{j,m}^{k'})$  に対し、式(24), (29) より、

$$U_i(a_{k,j}) = U_i(a_{k',j}), \quad 1 \leq i \leq m-1$$

が成り立つ。 $k \geq 1, k' \geq 1$  より、 $b_{j,m,L_{m+2}}^k \geq M_{C_m}, b_{j,m,L_{m+2}}^{k'} \geq M_{C_m}$  であるから、式(25) より

$$U_m(a_{k,j}) = U_m(a_{k',j})$$

が成り立つ。故に、

$$K(a_{k,j}) = K(a_{k',j})$$

が成り立つ。式(16)~(23) より、任意の  $p \in K(a_{k,j})$  と任意の  $d \geq 0$  に対し、

$$a_{i+k,t} = h(a_{k,j}, p, d) \quad (30)$$

とすると、式(30)と同一の  $(i, t)$  によって、

$$a_{i+k',t} = h(a_{k',j}, p, d) \quad (31)$$

とあらわせる。故に式(26)より、 $k \geq 1$  のとき  $\Pr(X_{n+1} = a_{i+k,t} \mid X_n = a_{k,j})$  は  $k$  のとり方には依存せず、 $(t, j, i)$  によって定まる。また、一回の推移において総繰り越し需要量の減少量は  $M_{C_m}$  以下であるから、

$\Pr(X_{n+1} = a_{i+k,t} \mid X_n = a_{k,j}) > 0$  がみたされるのは、 $i \geq -1$  の場合である。

故に、 $T$  の要素を level の昇順に並べ、level  $i$  では  $(a_{i,1}, \dots, a_{i,r})$  と並べると、 $\{X_n\}$  の推移確率行列  $P$  は次のようにあらわせる。

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (32)$$

式(32)で、各  $B_i$  及び  $A_i$  は  $r \times r$  行列である。 $B_i$  は level 0 から level  $i$  ( $i \geq 0$ ) への状態推移を表し、 $A_i$  は level  $k$  から level  $k+i-1$  ( $k \geq 1, i \geq 0$ ) への状態推移をあらわす。

$A = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i$  とする。各 level 内で状態を並び替えることにより、確率行列  $A$  は式(33)の基準形になる。このとき、行列  $A_i$  は式(34)の形になる。

$$A = \begin{pmatrix} H(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H(c) & 0 \\ T(1) & \cdots & \cdots & T(c) & T(0) \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} H_i(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_i(c) & 0 \\ T_i(1) & \cdots & \cdots & T_i(c) & T_i(0) \end{pmatrix} \quad (34)$$

式(33), (34)において,  $H(i)$ と $H_j(i)$  ( $i=1, \dots, c$ )は $t_i \times t_i$ 行列で,  $H(i)$ は既約確率行列である。 $T(i)$ と $T_j(i)$  ( $i=0, \dots, c$ )は $t_0 \times t_i$ 行列で,  $I_{t_0} - T(0)$ は逆行列を持つ。 $c$ は確率行列  $A$  の既約類の個数である。 $H(i)$ は既約確率行列だから, 平衡分布 $k_i$ が存在し

$$k_i H(i) = k_i, \quad k_i e_{t_i}^T = 1, \quad 1 \leq i \leq c \quad (35)$$

をみたす。 $\rho_i$  ( $1 \leq i \leq c$ )を次の式で定める。

$$\rho_i = k_i \sum_{j=1}^{+\infty} j H_j(i) e_{t_i}^T, \quad 1 \leq i \leq c \quad (36)$$

$\rho$ を次のように定める。

$$\rho = \max \{ \rho_1, \dots, \rho_c \} \quad (37)$$

#### 4 システムの性能評価

##### 4.1 定常状態解析

$\{X_n\}$ が定常分布を持つ必要十分条件は,  $0 < \rho < 1$ である (NEUTS [9])。本論文では  $0 < \rho < 1$ がみたされると仮定し, 定常状態における性能評価指標を求める。式(38)をみたす  $\{X_n\}$ の定常分布を $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ とする。ここで $\pi_i$ は level  $i$ に対する定常確率をあらわす  $r$ 次元ベクトルである。

$$\pi P = \pi, \quad \pi e_\infty^T = 1 \quad (38)$$

ただし,  $e_\infty = (1, 1, \dots)$ とする。 $\pi_i = (\pi_{i,j})$  ( $1 \leq j \leq r$ )とする。

$B_\infty$ を, 定常状態における期首の総受注残とする。

式(28)の記法を用いることにより, 期首における平均総受注残は,

$$E(B_\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r \pi_{i,j} (b_{j,m,L_{m+2}} + i M_{Cm}) \quad (39)$$

と記すことができる。

$I_{k\infty}$ を第  $k$  工程の部品在庫量とし,  $J_{k\infty}$ を第  $k$  工程の製品在庫量とする。期首における各工程の部品在庫量, 製品在庫量の平均は,

$$E(I_{k\infty}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r \pi_{i,j} b_{j,k,L_{k+1}}, \quad k=1, \dots, m \quad (40)$$

$$E(J_{k\infty}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r \pi_{i,j} b_{j,k,L_{k+2}}, \quad k=1, \dots, m-1 \quad (41)$$

$$E(J_{m\infty}) = \sum_{iM_{Cm} + b_{i,m,L_{m+2}} \leq M_m} \pi_{i,j} (M_m - (iM_{Cm} + b_{j,m,L_{m+2}})) \quad (42)$$

である。総受注残が正になる確率は,

$$\Pr \{B_\infty > 0\} = \sum_{j=1}^r \pi_{0,j} \delta(b_{j,m,L_{m+2}} > 0) + (1 - \sum_{j=1}^r \pi_{0,j}) \quad (43)$$

である。 $B'_\infty$ を、定常状態における期首の繰り越し需要量とする。 $B_\infty = B'_\infty + M_m - J_{m_\infty}$ より、期首における平均繰り越し需要量は、

$$E(B'_\infty) = E(B_\infty) + E(J_{m_\infty}) - E(B_\infty) \quad (44)$$

で与えられる。確率母関数ベクトル  $\pi(z)$  を

$$\pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \pi_i, \quad |z| \leq 1 \quad (45)$$

によって定める。 $y_k = (b_{1,k,L_{k+2}}, \dots, b_{r,k,L_{k+2}})$ ,  $z_k = (b_{1,k,L_{k+1}}, \dots, b_{r,k,L_{k+1}})$  とすると

$$E(B_\infty) = \pi(1) y_m^T + M_{Cm} \pi'(1) e_r^T \quad (46)$$

$$E(J_{k_\infty}) = \pi(1) y_k^T, \quad k=1, \dots, m-1 \quad (47)$$

$$E(I_{k_\infty}) = \pi(1) z_k^T, \quad k=1, \dots, m \quad (48)$$

とあらわせる。

$\pi(1)$ ,  $\pi'(1) e_r^T$  と  $\pi_0$  は IWASE and OHNO [12] に記したアルゴリズムを用いて求められる。これらの値と、式 (46) ~ (48) により、 $E(B_\infty)$ ,  $E(I_{k_\infty}), k=1, \dots, m$ ,  $E(J_{k_\infty}), k=1, \dots, m-1$  と  $E(B'_\infty)$  が得られる。 $\pi_i, i=1, 2, \dots$  は  $\pi_0$  から以下のように計算される。(RAMASWAMI, (1988))。

$$\pi_i = (\pi_0 \bar{B}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \pi_j \bar{A}_{i+1-j}) (I_m - \bar{A}_1)^{-1}, i=1, 2, \dots$$

$$\text{ここで, } \bar{A}_i = \sum_{k=0}^{\infty} A_{i+k} G^k, \quad \bar{B}_i = \sum_{k=0}^{\infty} B_{i+k} G^k$$

である。故に、式 (42), (44) より  $E(J_{m_\infty})$  と  $\Pr(B'_\infty > 0)$  が得られる。

## 4.2 性能評価の指標

引き取りかんばん枚数  $N = (N_1, \dots, N_m)$ , 生産指示かんばん枚数  $M = (M_1, \dots, M_m)$  に対し、定常状態における 1 期間当たりの平均在庫発注費用  $C_1(N, M)$ , 平均繰り越し需要費用  $C_2(N, M)$ , 平均総費用  $C(N, M)$  を以下のように定める。

$$C_1(N, M) = \sum_{i=1}^m (A_{I_i} (E(I_{i_\infty}) - \frac{1}{2} D) + \sum_{i=1}^m B_{I_i} E(J_{i_\infty})) + (A_o + A_w) D \quad (49)$$

$$C_2(N, M) = A_B E(B_\infty) + C_B \Pr \{B_\infty > 0\} \quad (50)$$

$$C(N, M) = C_1(N, M) + C_2(N, M) \quad (51)$$

ここで、

$A_{I_i}$  = 第  $i$  工程における 1 部品 1 期当たりの在庫費用

$B_{I_i}$  = 1 製品 1 期当たりの在庫費用

$A_o$  = 1 部品当たりの発注費用

$A_w$  = 1 部品当たりの引き取り費用



$A_B=1$  製品1期当たりの繰り越し需要費用  
 $C_B$ =繰り越し需要発生費用  
 である。

### 4.3 性能評価アルゴリズム

生産指示かんばん枚数 $M_1, \dots, M_m$ , 外注かんばん枚数 $N_1, \dots, N_m$ , 部品納入リードタイム $L_1, \dots, L_m$ , 生産能力分布 $F_1(x), \dots, F_m(x)$ , 製品需要分布 $G(x)$ に対する性能評価アルゴリズムを示す。

- Step 1. 十分小さな2つの正数  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  を定める。
- Step 2. 整数  $k_0$  を  $(I_r - \sum_{i=0}^{k_0} A_i) e_r^T < \varepsilon_1 e_r^T$ ,  $(I_r - \sum_{i=0}^{k_0} B_i) e_r^T < \varepsilon_1 e_r^T$  が共に成り立つように定める。
- Step 3.  $A = \sum_{i=0}^{k_0} A_i$  とする。各 level 内で状態を並び替え、行列  $A$  を式(33)の基準形とする。基準形を得るためにマルコフ連鎖の状態分類アルゴリズム (FOX and LANDI[12]) を用いる。
- Step 4. 式(36)により  $\rho$  を計算する。 $\rho$  が1以上ならばシステムは安定条件をみたさないため、停止する。
- Step 5.  $n \leftarrow 1$ ;  $G_n \leftarrow I_r$
- Step 6.  $n \leftarrow n + 1$ .
- Step 7.  $G_n \leftarrow \sum_{i=0}^{k_0} A_i G_{n-1}^i$ .
- Step 8. 条件  $\max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} |(G_n)_{i,j} - (G_{n-1})_{i,j}| \geq \varepsilon_2$  が成り立てば Step 6 へ行く。成り立たなければ Step 9 へ行く。
- Step 9.  $G \leftarrow G_n$
- Step 10.  $Q \leftarrow \sum_{i=0}^{k_0} B_i G^i$
- Step 11. 連立一次方程式  $qQ = q$ ,  $q e_r^T = 1$  を解く。
- Step 12. 4.1 により,  $E(I_{i_\infty})$ ,  $E(J_{i_\infty})$ ,  $E(B_\infty)$ ,  $E(B'_\infty)$ ,  $\Pr(B_\infty > 0)$  を求める。
- Step 13. 4.2 により,  $C_1(M, N)$ ,  $C_2(M, N)$ ,  $C(M, N)$  を求める。

### 5 数値例

工数  $m=2$ ,  $L_i=1$ ,  $C_{i,\max}=3 (i=1,2)$  とし, 生産能力分布  $F$  を次のように定めた。

- (a)  $F(3)=0.8$ ,  $F(2)=0.1$ ,  $F(0)=0.1$  (平均生産能力 = 2.6, 生産能力分散 = 0.84)

(b)  $F(3)=0.7, F(1)=0.2, F(0)=0.1$  (平均生産能力 = 2.3, 生産能力分散 = 1.21)

第 1 工程の生産能力分布を (a), 第 2 工程の生産能力分布を (b), 需要分布を平均 1.2 のポアソン分布とし, 費用係数を  $A_{I_1}=2, A_{I_2}=10, B_{I_1}=7, B_{I_2}=20, C_B=200, A_B=0$  とし, 変化する  $N_1$  の値に対する諸費用の値を図 2~図 4 に示した。この場合, 総費用を最小にするかんばん枚数は,  $N_1=5, N_2=4, M_1=2, M_2=3$  である。

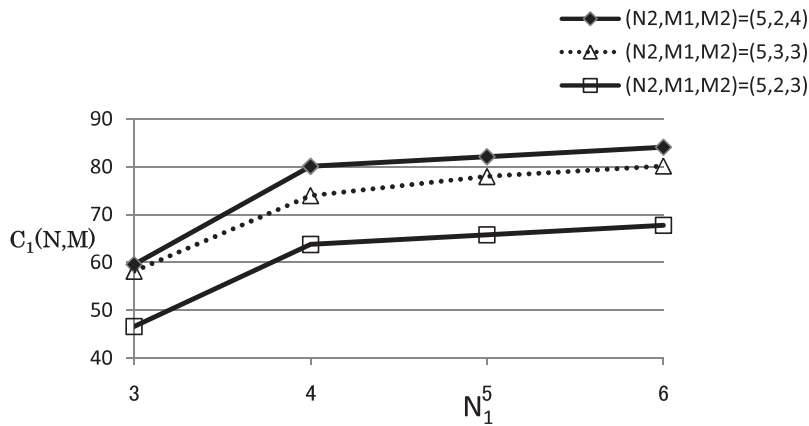


図 2.  $C_1(N, M)$  の変化 ( $F_1 = (a), F_2 = (b)$ )

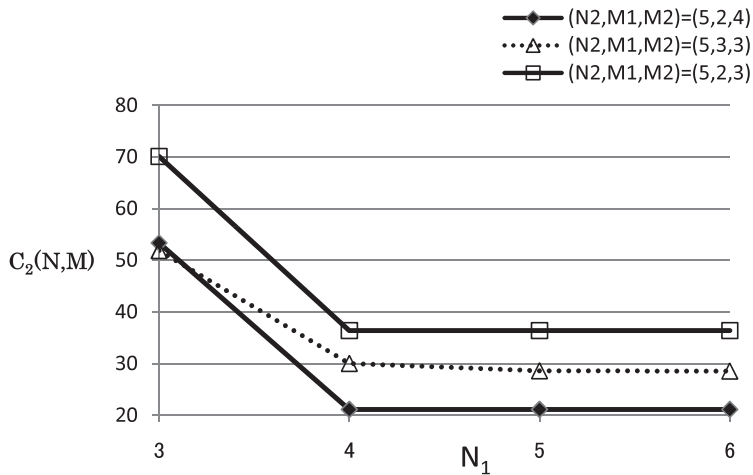


図 3.  $C_2(N, M)$  の変化 ( $F_1 = (a), F_2 = (b)$ )

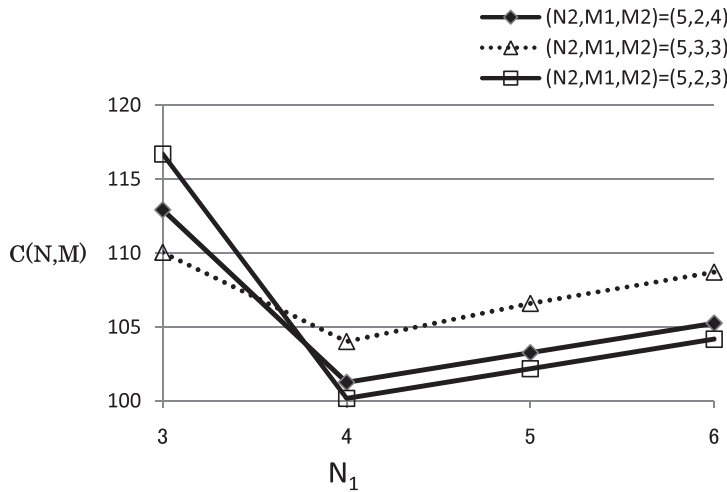


図 4.  $C(N, M)$  の変化 ( $F_1 = (a), F_2 = (b)$ )

## 6 結言

本研究では、製品需要と各工程の生産能力がそれぞれ独立な確率分布に従い、引き取りかんばんと生産指示かんばんによって単一品種の製品を生産する直列型多工程 JIT 生産在庫システムの定常状態解析を行った。対象システムを離散時間 M/G/1 型マルコフ連鎖としてあらわし、行列解析法による性能評価を行い、数値例を示した。

本研究の手法を用いることにより、シミュレーションや近似法を使った性能評価と比較してより高精度の特性値を得ることができる。つまり、本研究を適用することによって様々なシミュレーション技法や工程の分解等を使った近似解析手法で得られる解の信頼性評価を行うことができる。

一方で本研究の手法による計算では、式(37)における  $\rho$  の値が 1 に近い場合と各 level の要素数  $r$  が大きい場合に確率行列  $G$  の計算時間が急速に増大し、このことがシステムの性能評価に要する計算時間を大きくする。これらの場合は製品需要に対する生産能力に余裕のない場合や工程数が多い場合に対応している。今後アルゴリズムの工夫等を行い、このような場合に対応できることを目指したい。

### 参考文献

- [1] KAMARKAR, U. and KERME, S, 1989. Batch Policy in Kanban Systems. J. Manuf. Sys. 8,317-328.
- [2] DELEERSNYDER, J. L., HODGSON, T. J., MULLER-MALEK, H., and O'GRADY, P. J., 1989. Kanban Controlled Pull Systems : An Analytic Approach. Mgmt. Sci. 35, 1079-1091.
- [3] MITRA, D. and MITRANI, I., 1990. Analysis of a Kanban Discipline for Cell Coordination in Production Lines I. Mgmt. Sci. 36, 1548-1566.

- [ 4 ] MITRA, D. and MITRANI, I., 1991. Analysis of a Kanban Discipline for Cell Coordination in Production Lines II. *Oprns.Res.* 39, 807-823.
- [ 5 ] MATTA, M., Dallery, Y. and DI MASCOLO, M., 2005. Analysis of Assembly Systems Controlled with Kanbans. *European Journal of Operational Research* 166, 310-336.
- [ 6 ] OHNO, K., NAKASHIMA, K., KOJIMA, M., 1995. Optimal Numbers of Kanbans in a JIT Production System. *Int. J. Prod. Res.* 33, 1387-1401.
- [ 7 ] MONDEN, Y., 1993 *Toyota Production System : Practical Approach to Production Management*. 2nd ed. Industrial Engineering and Management Press, Norcross, Georgia
- [ 8 ] BERKLEY, B. J., 1992. A Review of The Kanban Production Control Research Literature. *Production and Operations Management* 1, 4,393-411.
- [ 9 ] NEUTS, M. F., 1989. *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*. Marcel Dekker, New York
- [10] RAMASWAMI, V., 1988. A Stable Recursion for the Steady-State Vector in Markov Chains of M/G/1 Type. *Stochastic Models*, 4(1), 183-188.
- [11] IWASE, M. and OHNO, K., 2008. Analysis of a Make-to-Order Production-Inventory System with Stochastic Production Capacity and Demand. *J. Jpn. Ind. Manage. Assoc.* 59, 21-33.
- [12] FOX, B. L., LANDI, D. M., 1968. An Algorithm for Identifying the Ergodic Subchains and Transient States of a Stochastic Matrix. *Comm. ACM.* 11, 9,619-621.